

**SOFTWARE PARA AJUSTES DE REDES GEODÉSICAS COMBINADAS SOFTWARE  
FOR ADJUSTMENTS OF GEODETIC COMBINED NETWORKS**

*Jorge García Díaz<sup>1</sup>*

*1 GEOCUBA, Cuba, jgarcia66@nauta.cu*

**RESUMEN:** Para evaluar la calidad de las observaciones geodésicas es necesaria la redundancia de los datos y con ella el ajuste o compensación de dichas observaciones para determinar coordenadas sin ambigüedades de los puntos desconocidos de las redes geodésicas. El método reconocido internacionalmente para resolver esta tarea es el método de los mínimos cuadrados con más de dos siglos de historia. En Cuba no existen herramientas nacionales comerciales para dar solución a la tarea de evaluar la calidad de las redes geodésicas. En el esfuerzo por desarrollar nuestras tecnologías esta tarea adquiere singular importancia.

El presente trabajo expone los resultados de la creación de una nueva versión del software cubano *MinQuad*, con arquitectura cliente servidor sobre software libre para realizar ajustes de redes geodésicas de forma sencilla y eficiente. El software da respuesta al ajuste de redes básicas de cualquier dimensión; así como al ajuste de redes combinadas con modelos matemáticos tanto lineales como no lineales.

**Palabras Claves:** Software para ajustes geodésicos, Redes geodésicas combinadas, Método de los mínimos cuadrados.

**ABSTRACT:** To evaluate the quality of the geodetics observations it is necessary the redundancy and with her the adjustment of this observations to determine coordinated without ambiguities of the unknown points of the geodetic networks. The internationally grateful method to solve this task it is the least square method with more than two centuries of history.

In Cuba national commercial tools don't exist to give solution to the task of the quality evaluation of the geodetics networks. In the effort to develop our technologies this task acquires singular importance. The present work exposes the results of the creation of a new version of the Cuban software *MinQuad* with client servant architecture on free software to carry out adjustments of

geodetics networks in a simple and efficient way. The software gives answer to the adjustment of basic networks of any dimension; as well as to the adjustment of combined networks with mathematical models so much lineal as not lineal.

**KeyWords:** *Software for geodetics adjustment, Combined Geodetic Networks, Least Squares Method.*

Recibido: 04/07/2022

Aprobado: 10/10/2022

## 1. INTRODUCCIÓN

Los fundamentos del método de los mínimos cuadrados (MMC) y de la teoría de errores de medición fueron elaborados a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX. El francés A.M. Legendre (1752-1833) en 1806 a los 54 años de edad publica la obra “Nuevos métodos para determinar las órbitas de los cometas” donde se fundamenta el MMC. En 1809 a los 32 años de edad el alemán C.F. Gauss (1777-1855) publica también sobre el MMC en su obra “Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del sol en secciones cónicas”. La simbólica introducida por Gauss se mantiene en la actualidad. Muchos son los nombres de los científicos que le han dedicado tiempo al desarrollo del MMC, algunos de ellos con implementaciones prácticas no realizables.

En Cuba se han utilizado con éxito las herramientas *SKI* mejorado en *Geo Office* y luego *Infinity* de la firma alemana *Leica Geosystems AG*, *GeoLab* canadiense y *Bernese* de la universidad de Berna en Suiza. Experiencias cubanas en el uso de este último se publican por Rodríguez (2018).

La opción de ajustes de redes combinadas está presente en la conocida herramienta canadiense *GeoLab*, desarrollada por la empresa canadiense *Microresearch inc.* No existen herramientas nacionales a escala productiva para dar respuesta al ajuste de redes combinadas.

Se publica la primera versión del software cubano *MinQuad* por García (2013), que utiliza la variante paramétrica del MMC denominada método de variación de coordenadas (MVC) ejemplificada en Cuba por Menéndez (1998) y Febles (1999). *MinQuad* funciona bajo arquitectura cliente servidor sobre software libre, resuelve el problema de ajustes de redes básicas 3D (x, y, h o X, Y, Z) en poligonometría o GPS, tanto como redes 2D(x, y) en Triangulación o Trilateración y 1D (h) en nivelación geométrica. En el 2015 se utiliza este software para el reajuste de la red de nivelación geométrica estatal cubana de orden I y II, con resultados positivos por Acosta (2015). La nueva versión que se presenta en este trabajo incluye además la opción de ajuste de redes combinadas, ya que la anterior versión no contaba con ella.

El ajuste por MMC en su variante MVC no depende ni del sistema de referencia utilizado ni de las coordenadas aproximadas de la red, y diferentes realizaciones deben conllevar a los mismos resultados más probables de las incógnitas dentro del límite de tolerancia establecido. Demostrar esta afirmación es de singular importancia para la geodesia en un contexto de gran diversidad de algoritmos computacionales para dar respuesta al modelo matemático del MMC. Pero, ¿Cuáles son las diferencias entre estos algoritmos, cuando la teoría expuesta por Gauss es solo una?. En este trabajo se da respuesta a esa pregunta y además se comparan los resultados del software con otras herramientas similares.

## 2. METODOLOGÍA

En el análisis se distinguen dos modelos del MMC: el matemático y el estocástico Leick (1990). El modelo matemático puede contener modelos lineales o no lineales. El modelo estocástico se expresa en términos de precisión (errores medios cuadráticos y elipses de errores), Fiabilidad (sesgos mínimos detectables -MBD- y sesgo de la señal o ruido -BNR-), y pruebas de hipótesis (prueba F, Chi2, W y T). *MinQuad* da respuesta a ambos modelos; pero trataremos en este espacio solo el modelo matemático.

Las causas más comunes de las diferencias entre los resultados de diferentes software son:

1. La forma de plantear las ecuaciones paramétricas del modelo matemático. En específico la forma en que se calcula el vector de términos libres, debe corresponderse con la forma de las ecuaciones paramétricas y normales.
2. Uso de algoritmos no rigurosos de transformación de coordenadas cuando es necesario homogenizar un sistema de referencia de ambas herramientas a comparar.
3. Errores al introducir los valores fijos de los puntos iniciales en ambas herramientas.
4. Diferentes algoritmos utilizados para construir el modelo estocástico, en específico errores medios cuadráticos, elipses de errores, error de unidad de peso, pruebas y test estadísticos.

Se analizan las dos primeras causas que suelen ser las más frecuentes, las otras dos son evidentes.

### **Forma de plantear las ecuaciones paramétricas del modelo matemático.**

La firma *Leica* muestra la ecuación paramétrica de la siguiente forma:

$e + b = AX + a...$  (1) Donde, e- Vector de las correcciones a las observaciones o denominada también residuos; b- Vector de las observaciones; a- Vector de los valores aproximados calculados; A-Matriz de diseño de la red geodésica y X- Vector de incógnitas. La matriz de diseño difiere si el modelo matemático es lineal (altimetría, GNSS) o no lineal (triangulación, trilateración y poligonometría).

Si expresamos (1) en términos generales, suponiendo que  $e = V$ , tenemos:

$$V = AX + (a - b) = A X + L... (1.1)$$

$$V = AX - (b - a) = A X - L... (1.2)$$

Las relaciones 1.1 y 1.2 nos dan la respuesta a la primera causa que se expone arriba. Algunos países para construir el modelo matemático calculan los términos libres como la diferencia entre los valores calculados y los observados (relación 1.1) y otros como la diferencia entre los valores observados y los calculados (relación 1.2). Matemáticamente ambas relaciones son equivalentes y por lo tanto no deben existir contradicciones. En cuanto al cálculo y estimación de las incógnitas ( $\hat{x}$ ) ambas formas son equivalentes y se obtiene el mismo valor al solucionar las ecuaciones normales.

$$\hat{x} = - (A^t P A)^{-1} A^t P (a - b) \text{ por (1.1) , ..... (1.3)}$$

$$\hat{x} = (A^t P A)^{-1} A^t P (b - a) \text{ por (1.2) , ..... (1.4)}$$

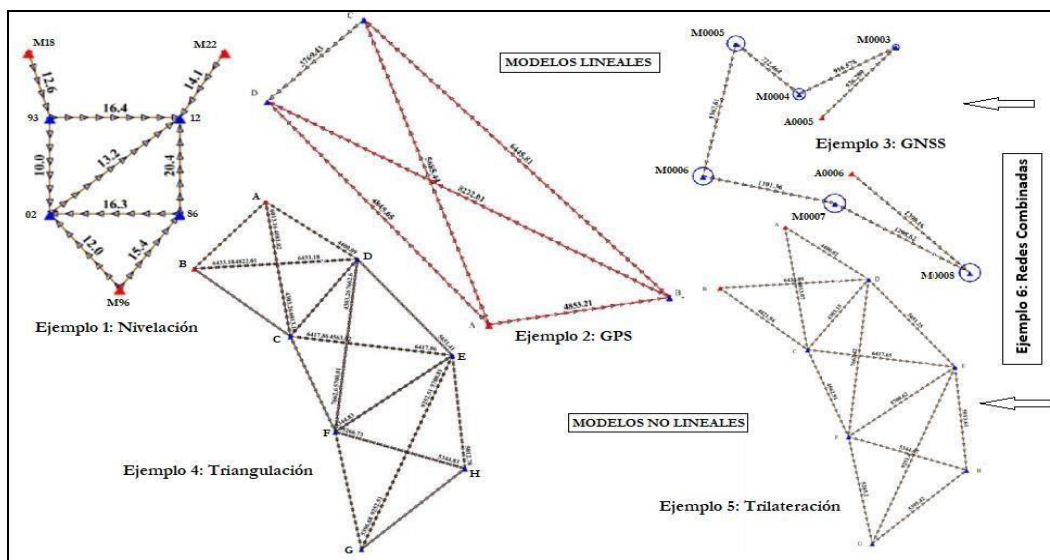
Si se plantean las ecuaciones paramétricas por la relación (1.1) y se utiliza (1.4) para calcular las incógnitas o si se usa (1.2) con (1.3), sería un error grosero en los valores ajustados. Si utilizamos la relación 1.2 evitamos tener que multiplicar por (-1) al solucionar las ecuaciones normales. Por tanto, el autor recomienda utilizar (1.2) con (1.4). P es la matriz de pesos de las observaciones.

### **Algoritmo de transformación de coordenadas.**

Al comparar dos herramientas se debe garantizar que ambas utilicen el mismo sistema de coordenadas. Cuando se realiza este proceso debe prestarse especial atención a los valores de los parámetros del elipsoide utilizado por ambas herramientas: semieje mayor (a) y achatamiento ( $\alpha$ ). A partir de varias simulaciones realizadas se demostró que una diferencia en la función auxiliar inversa del achatamiento ( $f = 1/\alpha$ ) de 0.000001413 unidades puede provocar entre 1 y 2 cm de error en las coordenadas elipsoidales, especialmente en la altura.

### **3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Para validar el software creado para ajustes de redes geodésicas combinadas se utilizarán los ejemplos dos, cuatro, cinco y seis (Ver Fig. 1) presentados por Menéndez (1998).



**Figura: 1. Ejemplos Redes Geodésicas para validar *MinQuad*.**

Nota: Las redes geodésicas son dibujadas automáticamente por *MinQuad* (servicio WMS de *Geoserver*).

En este trabajo cubano se exponen de forma bastante clara y precisa ejemplos de redes en aquel entonces: GPS, triangulación, trilateración y combinaciones de dichas redes. En esta fuente se utilizó *MatLab* de la firma estadounidense *MathWorks* para realizar el ajuste. En el material existen errores en el ejemplo de triangulación con dos ángulos observados y en la red GPS con tres incrementos de coordenadas observadas. Lo curioso es que se pudo comprobar que los resultados son meticulosamente correctos y por tanto estos errores en la práctica se supone que fueron corregidos. Luego de corregir estos errores es un material riguroso para comparar la herramienta sobre software libre *MinQuad* con *MatLab*. Ambas herramientas utilizan algoritmos muy diferentes. En cuanto a los ejemplos 1 y 3 (Fig. 1), son publicados por fuentes extranjeras: Rusia con un software no especificado en la fuente por Bolshakov (1989) y Brasil con el software *AjurGPS* por Monico (2008).

### 3.1 Modelos Lineales

En este modelo las incógnitas se obtienen de forma directa a partir de las observaciones. En este caso se encuentran las redes geodésicas de nivelación (1D) y GNSS (3D). Las redes altimétricas pueden ser expresadas en incrementos de coordenadas de acuerdo a la normal por la cual se mide esta componente de la posición espacial de un punto geodésico.

#### 3.1.1 Redes de nivelación (1D)

La ecuación básica de desniveles observados es como sigue:

$$r_{ij} = h_{ij} - h_{ij}^0 \dots (2)$$

Donde,  $h_{ij}$ - Desnivel observado,  $h_{ij}^0$  -Desnivel calculado.

Esta ecuación se muestra tanto para la nivelación geométrica como trigonométrica. En el caso de la nivelación trigonométrica se debe tener en cuenta la corrección por la diferencia de alturas entre el prisma y el instrumento.

García (2013) presenta como ejemplo una red altimétrica creada para estudiar deformaciones en la cortina de una presa. Los resultados de la comparación de las coordenadas ajustadas entre *MinQuad* y la herramienta cubana sobre DOS *Ajusniv* por Villafruela (1994) mostraron una diferencia máxima de 0.04 mm. Se procesaron otros ejemplos 1D con diferencias máximas similares.

A continuación, se comparan además los resultados de *MinQuad* 1D con un resultado proveniente de Rusia, en este caso no se conoce la herramienta computacional que utilizaron.

### Ejemplo 1. (1D)

Para comparar se muestra un ejemplo ruso de red 1D, Bolshakov (1989). (Ver Fig. 1)

Los datos de la red se muestran en la Fig. 2 en el formato nativo de *MinQuad*. Sobre el formato de entrada nativo de *MinQuad*, es necesario puntualizar que es un formato único, tanto para redes geodésicas 1D, 2D como 3D con un algoritmo único para tratar las tres dimensiones. Se debe prestar atención en la Fig. 2 que las alturas aproximadas de los puntos incógnitas tienen valores pero también podrían ser nulas. El software cuenta con una función para determinar las coordenadas aproximadas de forma automatizada. Es por ello que no es imprescindible conocer las coordenadas aproximadas para ejecutar el procesamiento. Además de este formato, *MinQuad* permite la importación de datos en formatos exportados por otras herramientas comerciales a fines como *Ajusniv*, *SKI*, *GeoLab* e *Infinity*.

```

1 %dimensión de la red (D) ejemplo de ajuste 1D del libro de Bolshakov de 1989 en español, página 282
2
3 %líneas observadas
4 %id desde hasta desnivel distancia angulos dx dy dz H0 xx xy xz yy yz zz
5 1 M18 93 6.125 12.6 0 0 0 0 1 1.2 0 0 0 0 0
6 2 93 12 8.320 16.4 0 0 0 0 1 0.9 0 0 0 0 0
7 3 M22 12 5.580 14.1 0 0 0 0 1 1.1 0 0 0 0 0
8 4 93 02 1.368 10.0 0 0 0 0 1 1.5 0 0 0 0 0
9 5 86 02 4.694 16.3 0 0 0 0 1 0.9 0 0 0 0 0
10 6 86 12 11.652 20.4 0 0 0 0 1 0.7 0 0 0 0 0
11 7 M96 02 -0.905 12.0 0 0 0 0 1 1.2 0 0 0 0 0
12 8 02 12 6.944 13.2 0 0 0 0 1 1.1 0 0 0 0 0
13 9 M96 86 -5.585 15.4 0 0 0 0 1 1.0 0 0 0 0 0
14
15
16 %puntos iniciales
17 % id nombre H X Y Z
18 1 M18 183.506 506637.133 290385.637 0
19 2 M22 192.353 507554.383 290385.637 0
20 3 M96 191.890 507063.761 289148.417 0
21
22 %puntos incógnitas
23 %id nombre H X Y Z
24 1 93 0 506737.181 290041.810 0
25 2 12 0 507345.138 290041.810 0
26 3 86 0 507345.138 289538.407 0
27 4 02 0 506737.181 289538.407 0

```

Figura: 2. Formato nativo de entrada en *MinQuad*.

La diferencia máxima en las alturas incógnitas de los puntos 93,12,86 y 02 con respecto a la publicación de Bolshakov (1989) es de 0.02 mm.

### 3.1.2 Redes GNSS (3D)

En las redes GNSS, los incrementos de coordenadas ( $\Delta X_{ij}, \Delta Y_{ij}, \Delta Z_{ij}$ ) observados se expresan como una función lineal directa de las diferencias de coordenadas. Se muestra la ecuación básica de observaciones de incrementos de coordenadas GNSS.

$$r_{ij} = \Delta X_{ij} - \Delta X_{ij}^0, \Delta Y_{ij} - \Delta Y_{ij}^0, \Delta Z_{ij} - \Delta Z_{ij}^0 \dots (3)$$

#### Ejemplo 2. (3D)

Para la validación del software en este tipo de redes se utiliza el ejemplo de un cuadrilátero medido con GPS por Menéndez (1998). En este caso se tienen los valores aproximados de las coordenadas de las incógnitas. En caso de no tenerse, el algoritmo las calcula con resultados idénticos. Al comparar con la fuente de referencia la diferencia máxima de coordenadas ( $X, Y, Z$ ), ajustadas de los vértices  $B, C$  y  $D$  es de 0.03 mm, los errores medios cuadráticos ( $EMC$ ) de los vértices del cuadrilátero también coinciden en este rango.

#### Ejemplo 3. (3D)

Se procesa la red GNSS publicada en Brasil por Monico (2008), donde se utiliza la herramienta denominada *AjurGPS* y la diferencia máxima obtenida con respecto a *MinQuad* en sus vértices incógnitas: M0003, M004, M0005, M0006, M0007 y M0008 es de 0.01 mm.

### Resumen de evaluaciones de modelos lineales por diferentes herramientas

Se concluye que los resultados obtenidos por *MinQuad* de las coordenadas ajustadas para modelos lineales 1D y 3D coinciden con los obtenidos por herramientas, tanto cubanas como extranjeras. Estas coincidencias se realizan en un rango máximo de 0.04 mm, a pesar de que los algoritmos computacionales son muy diferentes.

### 3.2 Modelos no lineales

En el caso de las observaciones de ángulos y distancias nos conducen a solucionar ecuaciones no lineales de forma indirecta. Para poder abordar el ajuste de estas observaciones por el MMC y poder resolver un sistema de ecuaciones no lineales, es necesario proceder a su linealización mediante el desarrollo de la serie de Taylor de primer orden ( $n$ ). Consideremos la siguiente ecuación que relaciona un valor observado “ $\ell$ ” con dos parámetros incógnitas  $x$  e  $y$ , mediante una función  $f$  no lineal,  $\ell = f(x, y)$ .

Si aplicamos el teorema de Taylor, podemos aproximar la función  $f$  mediante su desarrollo en la serie,

$$f_x = f_a + f'_a(x-a) + \frac{f''_a(x-a)^2}{2!} + \dots \dots (4)$$

$$f_x = S_{ij}, f_a = S_{ij}^0, f'_a(x-a) = dS_{ij} \text{ para el caso de medición de distancias,}$$

$$f_x = (\beta_{ijk}), f_a = (\beta_{ijk})^0, f'_a(x-a) = d(\beta_{ijk}) \text{ para el caso de medición de ángulos.}$$

$$l = f(x, y) =$$

$$f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 dx + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]_0 dy \right) + \frac{1}{2!} \left( \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_0 dx^2 + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_0 dy^2 + 2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_0 dx dy \right) + \dots \dots (4.1)$$

Donde  $(x_0, y_0)$  son valores iniciales aproximados de  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ;  $f(x_0, y_0)$  es el valor de la función no lineal evaluada para esos valores iniciales y  $(dx, dy)$  son las correcciones a los valores iniciales aproximados tal que:  $x=x_0+dx, y=y_0+dy$ . Cuanto mayor sea el valor del orden  $n$ , mejor es la aproximación que se obtiene de la función, aunque la significación de estos términos va disminuyendo. Si despreciamos los términos correspondientes a las derivadas superiores al primer orden, obtenemos la siguiente expresión lineal que aproxima la función  $f$ :

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 dx + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]_0 dy \right) \dots (4.2)$$

Los resultados de las derivadas parciales permiten obtener una matriz jacobina (Matriz de diseño de la red) para conformar el sistema de ecuaciones paramétricas. Abellán (2013) trata muy bien este desarrollo.

### 3.2.1 Redes de triangulación (2D)

La relación funcional no lineal del modelo matemático es una solución indirecta. Se pueden realizar tres tipos de medidas: acimut de una alineación, dirección de una alineación y ángulo horizontal entre dos direcciones. Determinemos la ecuación básica de observación para el tercer caso. Teniendo siempre en cuenta el cuadrante, se calculan las seis derivadas parciales que conforman la ecuación básica del ángulo observado por dos direcciones.

$$n_{ij} = \beta_{ij} - \beta_{ij}^0 = \rho \left[ \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} - \frac{\Delta y_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} \right] dx_i + \rho \left[ \frac{\Delta x_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} - \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} \right] dy_i - \rho \frac{\Delta y_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dx_j +$$

$$\rho \frac{\Delta x_{ij}^0}{(d_{ij}^0)^2} dy_j + \rho \frac{\Delta y_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} dx_k - \rho \frac{\Delta x_{ik}^0}{(d_{ik}^0)^2} dy_k \dots (5)$$

$$d_{ij}^0 = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}, \text{ distancia reducida... (5.1)}$$



Cada miembro de la ecuación básica debe multiplicarse por la constante angular ( $\rho$ ).

#### Ejemplo 4 (2D)

Al comparar los resultados de ambas herramientas para el ejemplo cuatro en la Fig. 1, obtenemos una diferencia máxima (dx, dy) de 0.4 mm para los vértices C, D, E, F, G y H.

#### 3.2.2 Redes de trilateración (2D)

Las distancias son horizontales en caso 2D y espaciales o inclinadas en caso 3D. Las mismas pueden expresarse con ayuda del desarrollo de una serie de Taylor hasta el primer orden con 4 derivadas parciales para el caso 2D que conforman la matriz de diseño.

La ecuación básica de observación para la distancia observada resulta de la siguiente forma (2D):

$$r_{ij} = S_{ij} - S_{ij}^0 = -\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \Delta x_i - \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \Delta y_i + \frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \Delta x_j + \frac{y_j - y_i}{S_{ij}} \Delta y_j \dots (6)$$

#### Ejemplo 5 (2D)

Los datos de las distancias observadas, las coordenadas fijas o iniciales y las coordenadas aproximadas incógnitas se introducen en el formato indicado en la Fig. 2. La estructura de la red se muestra en la Fig. 1 para el ejemplo cinco. Al comparar los resultados de ambas herramientas, obtenemos una diferencia máxima (dx, dy) de 0.3 mm para los vértices C, D, E, F, G y H.

#### 3.2.3 Redes de poligonometría (3D)

Para el cálculo de Z intervienen ahora la medida del ángulo cenital y la distancia geométrica.

#### Ecuación básica de observación del ángulo cenital.

La diferencia entre el ángulo cenital medido y el calculado, a partir de las coordenadas aproximadas de los puntos i y j es una cantidad pequeña, se expresa normalmente en segundos.

$$k_{ij} = V_{ij} - V_{ij}^0 = -\rho \frac{\Delta x_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dx_i - \rho \frac{\Delta y_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dy_i + \rho \frac{d_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} dz_i +$$

$$\rho \frac{\Delta x_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dx_j + \frac{\Delta y_{ij}^0 (\Delta z_{ij}^0 + m)}{(D_{ij}^0)^2 d_{ij}^0} dy_j - \rho \frac{d_{ij}^0}{(D_{ij}^0)^2} dz_j \dots (7)$$

$$D_{ij}^{0^2} = (x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0} + m)^2, \dots (7.1)$$

Por otro lado, tal y como se indicó en las ecuaciones de observación angulares, los sumandos de la ecuación básica de observación del ángulo cenital deben multiplicarse por la constante ( $\rho$ ).

La magnitud ( $m = p-h$ ) es la diferencia entre la altura del prisma y del instrumento.

## Ecuación básica de observación de la distancia geométrica.

$$r_{ij} = D_{ij} - D_{ij}^0 = -\frac{\Delta x_{ij}^0}{D_{ij}^0} dx_i - \frac{\Delta y_{ij}^0}{D_{ij}^0} dy_i - \frac{\Delta z_{ij}^0 + m}{D_{ij}^0} dz_i + \frac{\Delta x_{ij}^0}{D_{ij}^0} dx_j + \frac{\Delta y_{ij}^0}{D_{ij}^0} dy_j - \frac{\Delta z_{ij}^0 + m}{D_{ij}^0} dz_j \dots (8)$$

Donde  $r_{ij}$  es la diferencia entre la distancia geométrica medida y la calculada a partir de las coordenadas aproximadas. La distancia geométrica medida entre los puntos  $i$  y  $j$  del terreno, es

$$D_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i + m)^2} \dots (8.1)$$

### **Resumen de derivadas parciales obtenidas para modelos no lineales**

En total se resumen las series de Taylor en 22 derivadas parciales: seis en el caso de la triangulación, cuatro en la trilateración y doce en el caso de la poligonometría (seis para el ángulo cenital y seis para las distancias). *MinQuad* cuenta con una función denominada *Taylor* para el cálculo automatizado de estas derivadas parciales.

#### **3.2.4 Redes combinadas (3D)**

Para resolver la red combinada de ángulos y distancias se utilizan de forma conjunta las ecuaciones básicas de observación de la distancia y del ángulo similar a la forma de las ecuaciones básicas que se originan en la poligonometría.

#### **Ejemplo 6 (2D)**

El ejemplo seis que se muestra en la Fig. 1 es una red combinada de distancias y ángulos. Para *MinQuad* los ángulos se encuentran en el formato “gg.mm.ss” y los pesos en la triangulación se definen en uno. Al comparar los resultados de ambas herramientas para el ejemplo seis, se obtuvo una diferencia máxima ( $dx$ ,  $dy$ ) de 0.4 mm para los vértices C, D, E, F, G y H. Se combinaron además modelos lineales y no lineales con diferencias máximas en este rango.

#### **3.1.3 Resumen de las pruebas de calidad**

En los seis ejemplos sometidos a pruebas para la comparación de los resultados, la diferencia máxima obtenida en el valor ajustado para modelos lineales es de 0.04 mm y para modelos no lineales es de 0.4 mm. Por tanto, podemos afirmar que el modelo matemático del software *MinQuad* pasó esta etapa de validación y es consistente. En lo adelante el software tendrá que someterse a futuras pruebas relacionadas con su modelo estocástico, las cuales serán publicadas próximamente.

El hecho de que *MinQuad* sea una aplicación cliente – servidor sobre software libre, hace que esté disponible tanto desde un ordenador como desde un simple celular. Solo se necesita de un

navegador para consumir el servicio de ajuste de redes geodésicas combinadas desde el servidor activado por la Empresa.

#### 4. CONCLUSIONES

El software *MinQuad* es capaz de ajustar redes básicas y combinadas en cualquier dimensión, tanto con un modelo matemático lineal como no lineal. Una vez perfeccionado el modelo estocástico actual se realizará la introducción del software en las empresas del grupo empresarial GEOCUBA.

#### 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **Abellán, M.** (2013). Metodología de cálculo de redes topográficas. Universidad politécnica de Cartagena. En español (187 Pág.).
2. **Acosta, R.** (2015). Proyecto de desarrollo tecnológico. Ajuste de la red de nivelación estatal de I y II órdenes de Cuba. En español (27 Pág.).
3. **Bolshakov, V. y Gaidayev, P.** (1989). Teoría de la elaboración matemática de mediciones geodésicas. Editorial Mir. En español (397 Pág.).
4. **Febles, E.** (1999). El modelo matemático y los algoritmos de solución del método de variación de coordenadas a partir del método unificado de los mínimos cuadrados para su aplicación en Cuba. (Tesis presentada en opción al título de doctor en ciencias técnicas).
5. **García, J.** (2013). *MinQuad v 1.0*. Aplicación cliente servidor para ajustes 3D de redes geodésicas GPS sobre software libre. Informática 2013. En español (10 Pág.)
6. **Leick, A.** (1990). GPS Satellite Surveying. En inglés (349 Pág.).
7. **Menéndez, E.** (1998). Ajuste de redes GPS empleando el método de variación de coordenadas. Trabajo de diploma en opción al título de master en geodesia aplicada. En español (134 Pág.).
8. **Monico, J.** (2008). Posicionamiento por GNSS. Descripción, fundamentos y aplicaciones. En portugués (473 Pág.).
9. **Rodríguez, E.** (2018). Experiencias sobre ajustes de redes GPS con el empleo del software *Bernese 5.2*. Informática 2018. En español (10 Pág.).
10. **Villafruela, E.** (1994). *Ajusniv*, software sobre DOS para ajustes de redes altimétricas. Inédito.